راه‌حل مسئله‌های ریاضیات کانگورو ۱۳۹۷

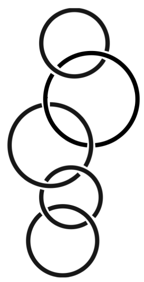
پایه‌های نهم و دهم

آمنه ابراهیم‌زاده طاری

پاسخ مسئله‌های سه امتیازی

۱. (۳) هر پسر خانواده دست‌کم دو برادر دارد. پس خانواده دست‌کم سه فرزند پسر دارد و هر دختر خانواده، دست‌کم یک خواهر دارد. پس خانواده دست‌کم ۲ دختر دارد. بنابراین خانواده دست‌کم ۵ فرزند دارد.

۲. (۳)



۳. (۳) با توجه به نابرابری مثلث، طول ضلع سوم باید بزرگ‌تر از ۳ و کوچک‌تر از ۷ باشد. تنها عدد فرد با این ویژگی، عدد ۵ است.

۴. (۳) اگر تصویر سمت راست را بالای تصویر سمت چپ قرار دهیم به‌طوری که پایه‌های میز سمت راست روی میز سمت چپ قرار بگیرد و گربه‌های ایستادهٔ دو تصویر روی هم بیفتند، در تصویر حاصل دو میز روی هم قرارگرفته‌اند و فاصلهٔ از بالای سر گربهٔ خوابیدهٔ زیر میز پایینی تا بالای سر گربهٔ خوابیدهٔ روی میز بالایی $۲۶۰ = ۱۵۰ + ۱۱۰$ سانتی‌متر می‌شود. این فاصله، دو برابر ارتفاع میز است. پس ارتفاع میز ۱۳۰ سانتی‌متر است.

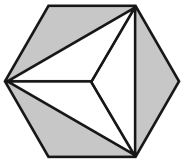
۵. (۵) اگر عدد وسط را x بنامیم، داریم

$$x - ۲ + x - ۱ + x + x + ۱ + x + ۲ = ۱۰^{۱۳۹۷}$$

پس $۵x = ۱۰^{۱۳۹۷}$. بنابراین

$$x = \frac{۱۰^{۱۳۹۷}}{۵} = \frac{۱۰ \times ۱۰^{۱۳۹۶}}{۵} = ۲ \times ۱۰^{۱۳۹۶}$$

۶. (۱) در هر شکل مساحت قسمت خاکستری، نصف مساحت شش‌ضلعی است. در شکل B، مساحت هر ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع درون شش‌ضلعی با هم برابر است. در مورد شکل‌های A و C هم می‌توانیم شش‌ضلعی‌ها را به این‌صورت تقسیم‌بندی کنیم (هر یک از ۶ مثلث متساوی‌الساقین شکل زیر با هم هم‌نهشت‌اند):



۷. (۲) تعداد بسته‌ها باید شمارندهٔ مشترک ۹۰، ۴۲ و ۶۰ باشند و بیش‌ترین تعداد دسته‌ها در صورتی به‌دست می‌آید که بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک این سه عدد باشد، یعنی $(۴۲,۶۰,۹۰) = ۶$.

۸. (۲) یکان $S + ۵$ برابر ۴ شده است، پس $S = ۹$.

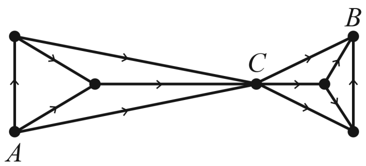
$۱ + ۴ + R = ۵ + R = ۵$، پس $R = ۰$. از طرفی $P + Q$ هم برابر ۶ شده است. پس

$$P + Q + R + S = ۶ + ۰ + ۹ = ۱۵$$

۹. (۱)

$$\frac{۲۵}{۱۰۰} \times ۲۰۱۸ + \frac{۲۰۱۸}{۱۰۰} \times ۲۵ = \frac{۲۰۱۸}{۴} + \frac{۲۰۱۸}{۴} = \frac{۲۰۱۸}{۲} = ۱۰۰۹$$

۱۰. (۲) اگر نقطه‌ها را مانند شکل زیر نام‌گذاری کنیم، به ۴ حالت مختلف می‌توانیم از A به C و به ۴ حالت مختلف می‌توانیم از C به B برویم. برای رفتن از A به B لازم است از C عبور کنیم. پس طبق اصل ضرب به $۴ \times ۴ = ۱۶$ حالت مختلف می‌توانیم از A به B برویم.



پاسخ مسئله‌های چهار امتیازی

۱۱. (۴) اگر ایستگاه را در x متری ساختمان دوم بسازیم، ایستگاه از ساختمان اول $x - ۲۵۰$ متر فاصله خواهد داشت. پس هر دانش‌آموز از ساختمان اول باید $x - ۲۵۰$ متر و هر دانش‌آموز از ساختمان دوم باید x متر راه برود. یعنی مجموع فاصله‌هایی که همهٔ دانش‌آموزان طی

می‌کنند برابر است با

$$۱۵۰x + ۱۰۰(۲۵۰ - x) = ۱۵۰x + ۲۵۰۰۰ - ۱۰۰x = ۲۵۰۰۰ + ۵۰x$$

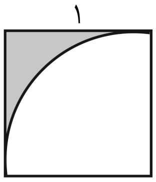
کم‌ترین مقدار عبارت بالا هنگامی اتفاق می‌افتد که $x = ۰$.

۱۲. (۴) اگر تا عدد m پیش رفته باشیم، تعداد عددهای نوشته شده برابر است با $۱ + ۲ + \cdots + m$، پس $\frac{m(m+۱)}{۲} = ۱۰۵$. بنابراین $m(m+۱) = ۲۱۰ = ۱۴ \times ۱۵$؛ یعنی $m = ۱۴$. از این بین، عددهای ۳، ۶، ۹ و ۱۲ بر ۳ بخش‌پذیرند. پس تعداد عددهای بخش‌پذیر بر ۳ برابر است با

$$۳ + ۶ + ۹ + ۱۲ = ۳۰$$

۱۳. (۲) مساحت قسمت خاکستری را می‌توانیم به ۸ ربع دایره و ۸ شکل، به‌صورت زیر تقسیم کنیم. مساحت هر ربع دایره برابر است با $\frac{\pi}{۴}$ و مساحت قسمت خاکستری برابر است با $۱ - \frac{\pi}{۴}$. پس مساحت قسمت خاکستری برابر است با

$$۸ \times \frac{\pi}{۴} + ۸\left(۱ - \frac{\pi}{۴}\right) = ۸$$



۱۴. (۵) اگر قطارهایی را که از M یا به M رفته‌اند، با قطارهایی که از N یا به N رفته‌اند جمع کنیم و به حاصل‌جمع، قطارهایی را اضافه کنیم که از O یا به O رفته‌اند و قطارهایی که از P یا به P رفته‌اند و قطارهایی که از Q یا به Q رفته‌اند، در این حاصل‌جمع هر یک از ۴۰ قطار را دوبار شمرده‌ایم: یک‌بار در شهری که از آن حرکت کرده و یک‌بار در شهری که به آن رفته است. پس این حاصل‌جمع باید برابر ۸۰ باشد. پس تعداد قطارهایی که از Q یا به Q رفته‌اند، برابر ۴۰ است.

۱۵. (۲) تعداد کل دانشجویان این دانشگاه را با n و تعداد دانشجویانی را که زبان می‌خوانند با m نشان می‌دهیم. می‌دانیم $\frac{۶۵}{۱۰۰}m$ زبان غیرانگلیسی می‌خوانند، پس

$$\frac{۶۵}{۱۰۰}m = \frac{۱۳}{۱۰۰}n \Rightarrow ۵m = n \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{۱}{۵} = ۲۰\%$$

۱۶. (۱) اگر پولی را که پدر پدرام و برادر بزرگ‌ترش به او داده‌اند با x و y نمایش دهیم، داریم

$$\begin{cases} x = \frac{۱۰۰۰۰+y}{۲} \\ y = \frac{۱۰۰۰۰+x}{۳} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x - y = ۱۰۰۰۰ \\ ۳y - x = ۱۰۰۰۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x - y = ۱۰۰۰۰ \\ ۶y - ۲x = ۲۰۰۰۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۵y = ۳۰۰۰۰ \Rightarrow y = ۶۰۰۰,\ x = ۸۰۰۰$$

پس پول کتاب برابر است با

$$۱۰۰۰۰ + ۸۰۰۰ + ۶۰۰۰ = ۲۴۰۰۰$$

۱۷. (۴) اگر عدد سه‌رقمی موردنظر را با $\overline{abc}$ نمایش دهیم، داریم

$$۹ \times \overline{ac} = \overline{abc} \Rightarrow ۹(۱۰a + c) = ۱۰۰a + ۱۰b + c$$

$$\Rightarrow ۹۰a + ۹c = ۱۰۰a + ۱۰b + c \Rightarrow ۸c = ۱۰a + ۱۰b = ۱۰(a + b)$$

پس $۸c$ بر ۱۰ بخش‌پذیر است، بنابراین c باید بر ۵ بخش‌پذیر باشد. پس $c = ۰$ یا $c = ۵$. ولی c نمی‌تواند برابر صفر باشد، چون در این‌صورت $a + b$ برابر صفر خواهد شد که ممکن نیست. پس $c = ۵$ و در نتیجه $a + b = ۴$. برای a و b حالت‌های زیر را داریم:

$$a = ۴,\ b = ۰ \qquad a = ۳,\ b = ۱ \qquad a = ۲,\ b = ۲ \qquad a = ۱,\ b = ۳$$

۱۸. (۵) اگر زیر رادیکال nبار $۲۰۱۸^۲$ آمده باشد، داریم

$$\sqrt{۲۰۱۸^۲ \times n} = ۲۰۱۸^{۱۰} \Rightarrow ۲۰۱۸\sqrt{n} = ۲۰۱۸^{۱۰}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = ۲۰۱۸^۹ \Rightarrow n = (۲۰۱۸^۹)^۲ = ۲۰۱۸^{۱۸}$$

۱۹. (۴)

$$۱۰^{۲۰۱۸} - ۱ = \underbrace{۹۹۹\ldots۹}_{\text{۲۰۱۸ تا}}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۹} \times ۱۰^{۲۰۱۸} \times (۱۰^{۲۰۱۸} - ۱) = \underbrace{۱۱\ldots۱}_{\text{۲۰۱۸ تا}} \times ۱۰^{۲۰۱۸} = \underbrace{۱۱\ldots۱}_{\text{۲۰۱۸ تا}}\underbrace{۰۰\ldots۰}_{\text{۲۰۱۸ تا}}$$

پس این عدد ۴۰۳۶ رقمی است.

۲۰. (۱) سه چندضلعی ساخته شده به شکل زیرند:

این چندضلعی $۳۸ = ۱۹۹۹ - ۲۰۱۸ + ۱ + ۱۸$ ضلع دارد. $۱, ۲, \ldots ۱۸, ۱۰۱۸, ۲۰۰۰, ۲۰۰۱, \ldots, ۲۰۱۸$

این چندضلعی $۱۰۰۱ = ۱۷ - ۱۰۱۸$ ضلع دارد. $۱۸, ۱۹, \ldots, ۱۰۱۸$

این چندضلعی $۹۸۳ = ۱۰۱۷ - ۲۰۰۰$ ضلع دارد. $۱۰۱۸, ۱۰۱۹, \ldots, ۲۰۰۰$

پاسخ مسئله‌های پنج امتیازی

۲۱. (۲) به‌جز ۲۰۱۸، حاصل‌ضرب بقیهٔ عددها برابر ۱ است. چون عددهای صحیح نوشته شده‌اند، پس بقیهٔ عددها یا ۱اند یا ۱−. از طرفی چون حاصل‌ضرب برابر ۱ شده است، پس تعداد ۱−ها هم زوج است. به‌جز ۲۰۱۸ مجموع بقیهٔ عددها برابر صفر شده است، پس تعداد ۱ها با تعداد ۱−ها برابر است. پس به تعداد زوج ۱− و به همان تعداد ۱ نوشته شده است.

پس به‌جز ۲۰۱۸، تعداد بقیهٔ عددها مضربی از ۴ است. بنابراین تعداد کل عددها، باقی‌مانده‌اش بر ۴ برابر ۱ است و از بین عددهای گزینه‌ها، فقط ۲۰۱۷ این خاصیت را دارد.

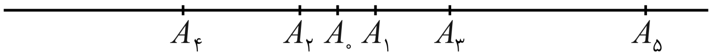
۲۲. (۳) اگر عددها را با a، b، c و d نشان دهیم، داریم

$$\frac{a+b+c}{۳}+d+\frac{a+b+d}{۳}+c+\frac{a+d+c}{۳}+b+\frac{b+c+d}{۳}+a$$
$$=۱۷+۲۱+۲۳+۲۹=۹۰ \Rightarrow ۲a+۲b+۲c+۲d=۹۰$$
$$\Rightarrow ۲(a+b+c+d)=۹۰ \Rightarrow a+b+c+d=۴۵$$

اگر d بزرگ‌ترین عدد از بین ۴ عدد باشد، داریم

$$\frac{a+b+c}{۳}+d=\frac{۴۵-d}{۳}+d$$
$$=۱۵+\frac{۲d}{۳}=۲۹ \Rightarrow \frac{۲d}{۳}=۱۴$$
$$\Rightarrow d=۱۴\times\frac{۳}{۲}=۲۱$$

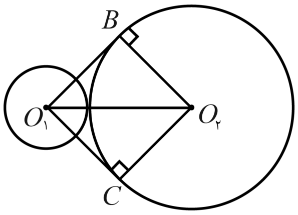
۲۳. (۵) به شکل زیر دقت کنید:



$A_۰$ وسط $A_۲A_۱$ است، پس $A_۲$ سمت چپ $A_۰$، و $A_۱$ سمت راست آن است. $A_۱$ وسط $A_۲A_۳$ است، پس $A_۳$ سمت راست $A_۱$ است. $A_۲$ وسط $A_۴A_۳$ است، پس $A_۴$ سمت چپ $A_۲$ است. اگر به همین شکل ادامه بدهیم، $A_۲$، $A_۴$، $A_۶$، ... با همین ترتیب در سمت چپ $A_۰$ قرار می‌گیرند و $A_۱$،$A_۳$، $A_۵$، ... با همین ترتیب در سمت راست $A_۰$. همچنین داریم

$$A_۰A_۱=۱,\ A_۱A_۳=۲,\ A_۳A_۵=۸,\ A_۵A_۷=۳۲,\ A_۷A_۹=۱۲۸,\ A_۹A_{۱۱}=۵۱۲$$
$$\Rightarrow A_۰A_{۱۱}=۱+۲+۸+۳۲+۱۲۸+۵۱۲=۶۸۳$$

۲۴. (۳) قطر دایره‌هایی که درون حلقه رسم می‌کنیم ۸ است، یعنی شعاع‌شان برابر ۴ است. از مرکز دایرهٔ کوچک‌تر، دو مماس بر یکی از دایره‌های وسط حلقه رسم می‌کنیم. ادعا می‌کنیم زاویهٔ بین این دو مماس از ۹۰° بیش‌تر و از ۱۲۰° کم‌تر است.

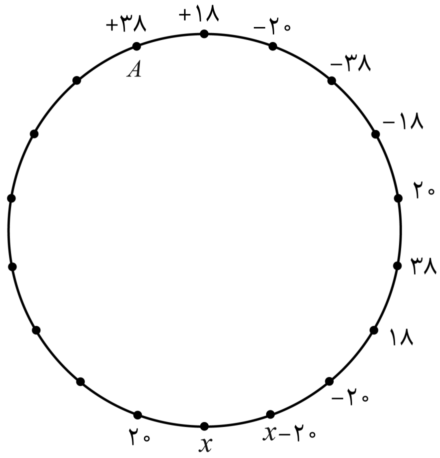


اثبات ادعا: اگر $O_۱$ و $O_۲$ مرکزهای دایرهٔ کوچک و دایرهٔ بین حلقه باشند و نقطه‌های B و C محل تماس باشند، می‌دانیم $O_۱B\perp O_۲B$، $O_۱O_۲=۵$ و $O_۲B=۴$. بنابراین بنابر قضیهٔ فیثاغورس، $O_۱B=۳$. داریم

$$O_۲B>O_۱B \Rightarrow \widehat{BO_۱O_۲}>\widehat{BO_۲O_۱} \Rightarrow \widehat{BO_۱O_۲}>۴۵^\circ \Rightarrow \widehat{BO_۱C}=۲\widehat{BO_۱O_۲}>۹۰^\circ$$
$$O_۱B>\frac{O_۱O_۲}{۲} \Rightarrow \widehat{O_۱O_۲B}>۳۰^\circ \Rightarrow \widehat{BO_۱O_۲}<۶۰^\circ \Rightarrow \widehat{BO_۱C}=۲\widehat{BO_۱O_۲}<۱۲۰^\circ$$

بنابراین $\widehat{BO_۱C} > ۹۰^\circ$، پس اگر چهار دایره درون حلقهٔ بین دو دایره رسم کنیم، حتماً هم‌پوشانی خواهند داشت و $\widehat{BO_۱C} < ۱۲۰^\circ$. پس می‌توانیم سه دایره درون حلقهٔ بین دو دایره رسم کنیم به‌طوری که هم‌پوشانی نداشته باشند.

۲۵. (۴) اگر عددی را که در سمت راست عدد ۲۰ است x بنامیم، عدد بقیهٔ رأس‌ها مانند شکل زیر به‌دست می‌آیند.



۲۶. (۴) اگر ۲۰۱۸ را به عامل‌های اول تجزیه کنیم، داریم

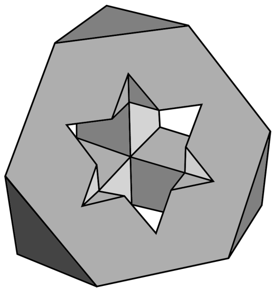
$$۲۰۱۸ = ۲ \times ۱۰۰۹$$

پس مستطیل باید ۱۰۰۹ × ۲ باشد و بیش‌ترین حاصل‌جمع هنگامی به‌دست می‌آید که خانه‌های جدول شطرنجی، رنگ شوند. چون در جدول ۱۰۰۹ × ۲، بیش‌ترین عددی که ممکن است در یک خانه قرار بگیرد ۳ است، پس در حالت شطرنجی، تعداد خانه‌هایی که در آن‌ها ۳ نوشته می‌شود هم بیش‌ترین حالت ممکن است.

اگر جدول را به صورت شطرنجی رنگ کنیم، ۱۰۰۹ خانه رنگ می‌شوند و در ۱۰۰۹ خانهٔ دیگر، عددی قرار می‌گیرد. به‌جز دوتا از این خانه‌ها که در آن‌ها ۲ نوشته شده، در بقیهٔ خانه‌ها ۳ نوشته شده است. پس مجموع عددها برابرند با

$$۳ \times ۱۰۰۷ + ۲ + ۲ = ۳۰۲۵$$

۲۷. (۱)



۲۸. (۴) در هر یک از سطرها باید یک عدد مضرب ۳ داشته باشیم: یک عدد با باقیماندهٔ ۱ و یک عدد با باقیماندهٔ ۲ در تقسیم بر ۳. ابتدا سطر بالا را می‌سازیم. این کار به !۳ × ۲ × ۲ × ۲ حالت امکان‌پذیر است (دو عدد مضرب ۳ داریم، دو عدد داریم که باقیمانده‌شان بر ۳ برابر ۱ است و دو عدد هم داریم که باقیمانده‌شان بر ۳ برابر ۲ است. پس به ۸ حالت می‌توانیم عددها را انتخاب کنیم و می‌توانیم هر دسته‌ی سه‌تایی

از عددها را به $۶ = !۳$ حالت مختلف بچینیم). در سطر دوم، باید زیر عدد مضرب ۳، عدد دیگری نوشته شود که مضرب ۳ است. زیر عددی که باقیمانده‌اش بر ۳ برابر ۲ است باید عددی بنویسیم که باقیمانده‌اش بر ۳ برابر ۱ است و به همین شکل، زیر عددی که باقیمانده‌اش بر ۳ برابر ۱ است باید عددی بنویسیم که باقیمانده‌اش بر ۳ برابر ۲ است. پس بعد از چیدن سطر اول، سطر دوم به یک حالت چیده می‌شود. پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با $۴۸ = !۳ \times ۲ \times ۲ \times ۲$.

۲۹. (۳) امکان ندارد مکعب بزرگ، $۶ \times ۶ \times ۶$ یا بزرگ‌تر باشد. اگر این مکعب $۶ \times ۶ \times ۶$ باشد، حتی اگر تمام وجه‌هایش رنگ شده باشند $۶۴ = ۴ \times ۴ \times ۴$ مکعب کوچک بدون وجه رنگی خواهیم داشت. مکعب بزرگ نمی‌تواند $۳ \times ۳ \times ۳$ یا کوچک‌تر باشد، چون تعداد مکعب‌های کوچک چنین مکعب‌هایی از ۴۵ کم‌تر است. همچنین مکعب بزرگ نمی‌تواند $۴ \times ۴ \times ۴$ باشد، چون اگر $۴ \times ۴ \times ۴$ باشد و تنها یک وجه آن رنگ شده باشد، $۴۸ = ۴ \times ۴ \times ۳$ مکعب بدون وجه رنگی خواهیم داشت. اگر آن دو وجه آن رنگ شده باشد هم دو حالت داریم:

حالت اول: دو وجه کنار هم رنگ شده باشند که در این‌صورت $۳۶ = ۴ \times ۳ \times ۳$ مکعب بدون وجه رنگی خواهیم داشت.

حالت دوم: دو وجه روبه‌روی هم رنگ شده باشند که، در این‌صورت $۳۲ = ۲ \times ۴ \times ۴$ مکعب بدون وجه رنگی خواهیم داشت.

اگر هم بیش از دو وجه رنگ شده باشند، تعداد مکعب‌های بدون وجه رنگی باز هم کم‌تر می‌شود. پس مکعب بزرگ نمی‌تواند $۴ \times ۴ \times ۴$ باشد. بنابراین تنها حالتی که باقی می‌ماند این است که مکعب $۵ \times ۵ \times ۵$ باشد.

اگر هر شش وجه مکعب بزرگ رنگ شده باشند، $۲۷ = ۳ \times ۳ \times ۳$ مکعب بدون وجه رنگی خواهیم داشت.

اگر پنج وجه مکعب بزرگ رنگ شده باشند، $۳۶ = ۴ \times ۳ \times ۳$ مکعب بدون وجه رنگی خواهیم داشت.

اگر چهار وجه مکعب بزرگ رنگ شده باشند و دو وجهی که رنگ نشده‌اند کنار هم باشند، $۴۸ = ۴ \times ۴ \times ۳$ وجه بدون رنگ خواهیم داشت.

اگر چهار وجه مکعب رنگ شده باشند و دو وجه بدون رنگ روبه‌روی هم باشند، آنگاه $۴۵ = ۵ \times ۳ \times ۳$ وجه بدون رنگ خواهیم داشت.

اگر کم‌تر از ۴ وجه رنگی داشته باشیم، تعداد مکعب‌های با وجه‌های بدون رنگ بیش‌تر از ۴۵ خواهد بود. پس چهار وجه مکعب رنگ شده‌اند.

۳۰. (۴) در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABE، $\hat{B} = ۳۰^\circ$. پس

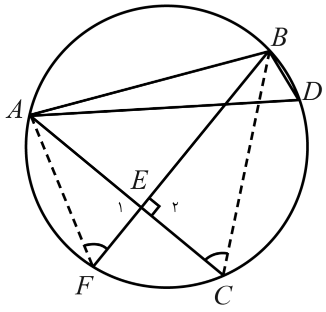
$$AE = \frac{۱}{۲}AB = ۱۲$$

و

$$EB = \frac{\sqrt{۳}}{۲}AB = ۱۲\sqrt{۳}$$

حال وترهای BC و AF را رسم می‌کنیم. زاویه‌های $\hat{F}$ و $\hat{C}$ هر دو روبه‌روی کمان $\overset{\frown}{AB}$ هستند، پس با هم برابرند.

$$\hat{C} = \hat{F},\ \hat{E}_۱ = \hat{E}_۲ = ۹۰ \Rightarrow \overset{\triangle}{AEF} \sim \overset{\triangle}{BEC}$$
$$\Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{EF}{EC} \Rightarrow \frac{۱۲}{۱۲\sqrt{۳}} = \frac{EF}{۳} \Rightarrow EF = \sqrt{۳}$$



حال وتر BD را رسم می‌کنیم. زاویهٔ $\widehat{ABD}$ روبه‌روی قطر دایره است، پس $\widehat{ABD} = ۹۰^\circ$ و زاویه‌های $\widehat{AFB}$ و $\widehat{ADB}$ هر دو روبه‌روی کمان AB هستند. پس

$$A\hat{D}B = A\hat{F}B, \quad A\hat{B}D = \hat{E}_۱ = ۹۰^\circ \Rightarrow \overset{\triangle}{ABD} \sim \overset{\triangle}{AEF}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{EF} \Rightarrow \frac{۲۴}{۱۲} = \frac{BD}{\sqrt{۳}} \Rightarrow BD = ۲\sqrt{۳}$$